der Literatur zu findenden einfachen Praxisformeln herleiten und mit unseren Rechnungen vergleichen.
Wir werden in den folgenden Kapiteln häufig von der (scheinbaren) Bewegung der Sonne um die Erde sprechen. Selbstverständlich meinen wir damit eigentlich die Bewegung der Erde um die Sonne. Die scheinbare und wahre Bewegung ist über die in Tabelle 3.25 im Anhang angegebene Transformation vom heliozentrischen ins geozentrische KOS (siehe Kapitel 3.2.1) einfach ineinander überführbar. Oft ist das geozentrische Bild mit der (scheinbaren) Bewegung der Sonne sogar anschaulicher und wird deswegen auch gern benutzt.

3.5.2.1 Die Zeitgleichung und das Analemma

Wir wissen bereits, dass die Kulmination der wahren Sonne von der Kulmination der mittleren Sonne (die laut Definition genau um 12:00 MOZ kulminiert) abweichen wird. Die mittlere Sonne „bewegt“ sich gleichmäßig entlang des Äquators. Die wahre Sonne hat entlang ihrer elliptischen Bahn unterschiedliche Geschwindigkeiten (2. Keplersche Gesetz) und außerdem erfolgt ihre scheinbare Bewegung entlang der Ekliptik, die ja gegen den Äquator geneigt ist. Beide Sonnen „treffen“ aber definitionsgemäß nach dem Ablauf eines Jahres wieder zusammen, haben also die gleiche Umlaufzeit. Das Vorgehen bei der Berechnung der Kulmination ist nun wie folgt:

- Aus der Lösung der Keplergleichung berechnen wir im heliozentrischen Koordinatensystem die heliozentrisch-ekliptikale Länge der Erde (3.71) als Funktion der Zeit (z. B. jeweils am Mittag 12:00 UT an den jeweiligen Tagen eines Jahres).[43] Wir benutzen dafür die Bezeichnung t_d.
- Daraus ermitteln wir die geozentrisch-ekliptikale Länge der Sonne $\lambda_\odot(t_\mathrm{d})$ und rechnen diese in geozentrisch-äquatoriale Koordinaten $\alpha_\odot(t_\mathrm{d}), \delta_\odot(t_\mathrm{d})$ um:

$$\begin{aligned} \alpha_\odot(t_\mathrm{d}) &= \arctan\left[\cos\varepsilon \tan\lambda_\odot(t_\mathrm{d})\right] \\ \delta_\odot(t_\mathrm{d}) &= \arcsin\left[\sin\varepsilon \sin\lambda_\odot(t_\mathrm{d})\right] \end{aligned} \tag{3.74}$$

- Wir erhalten so die Deklination und die Rektaszension der (wahren) Sonne als Funktion der Zeit.
- Wir berechnen dann die Sternzeit nach (3.11) und erhalten daraus über (3.7) den Stundenwinkel τ_ZGL der Sonne. Dieser entspricht der sogenannten *Zeitgleichung* (ZGL). Der Stundenwinkel ist ja für ein Himmelsobjekt laut Kapitel 3.2.2 die Zeit, die ein Körper noch bis zum Meridiandurchgang braucht oder bereits hinter sich hat. Damit gibt die Zeitgleichung das Vor- bzw. Nachgehen der (wahren) Sonne gegenüber einer gleichmäßig laufenden mittleren Sonne (UT) an:

$$\tau_\mathrm{ZGL} = \mathrm{WOZ} - \mathrm{MOZ} = \tau_{\mathrm{w},\odot} = \theta_\mathrm{w}(t_\mathrm{d}) - \alpha_\odot(t_\mathrm{d}) \quad . \tag{3.75}$$

[43] Streng genommen müssten wir für diese Berechnung die ET anstelle UT nehmen. Für unsere Rechnung kann man das aber vernachlässigen. Warum? Überprüfen Sie die Abweichung.

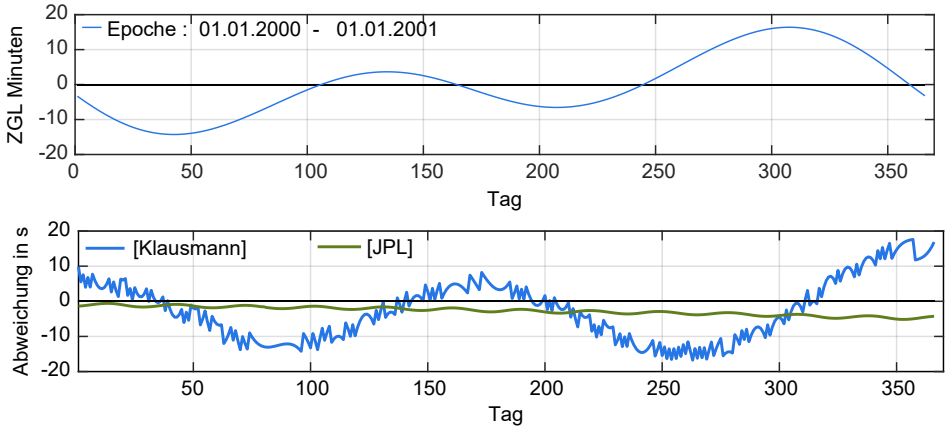


Abb. 3.17: Berechnete Zeitgleichung und Abweichung von publizierten Werten (Klausmann 1990) [20] und JPL [21])

Mit der Zeitgleichung (3.75), die in Abb. 3.17 aufgetragen ist, können wir somit direkt die tägliche Abweichung der Kulminationszeit der (wahren) Sonne von 12:00 lokaler (mittlerer) Ortszeit berechnen. Wir erkennen, dass von Jahresbeginn bis ins Frühjahr die wahre Sonne der mittleren Sonne voraus ist. Die Verhältnisse kehren sich dann im Sommer um. Im Herbst und frühen Winter hinkt die wahre Sonne dann der mittleren hinterher.
Mit (3.12) lässt sich die Kulminationszeit für jede geographische Länge einfach berechnen. Abb. 3.17 zeigt die Abweichung unserer Rechnung von hochgenauen Rechnungen wie sie vom JPL [21] zur Verfügung gestellt werden. Die Übereinstimmung ist sehr gut.[44] Beim Vergleich mit den empirischen Daten aus [20] muss man berücksichtigen, dass diese über viele Jahre gemittelt wurden, so dass hier neben dem Schaltjahreseffekt (366 anstelle von 365 Tagen) auch jährliche Veränderungen der Bahnparameter und insbesondere des Frühlingspunktes eingehen.
Trägt man für die Sonne deren Deklination über ihren Stundenwinkel (für z. B. 12:00 UT) für jeden Tag des Jahres auf, dann erhält man ein sogenanntes Analemma. In (Abb. 3.18) zeigen wir Analemmas für jeweils drei verschiedene Exzentrizitäten e und Ekliptikschiefen ε. Wäre die Erdbahn kreisförmig und die Erdachse normal zur Ekliptik, dann wäre die Zeitgleichung konstant gleich 0. Die Abhängigkeit des Analemmas von Exzentrizität e und Ekliptikschiefe ε kann man zur Bestimmung dieser Parameter aus dem Analemma nutzen (MATLAB Skript 3.39).
Zur Beobachtung eines Analemmas nimmt man im Laufe eines Jahres an jedem Tag zum gleichen Zeitpunkt (auf ±2s genau) mit einer fest montierten Kamera (Sonnenbeobachtungs-Schutzfilter nicht vergessen!) ein Bild auf und überlagert am Ende eines Jahres alle Auf-

[44] In der Abbildung wird sichtbar, dass in der JPL Rechnung Störungen der reinen Keplerbahn durch den Mond zu einer periodischen Abweichung in Monatsabständen und zu einer Abweichung auf einer größeren Zeitskala führen.

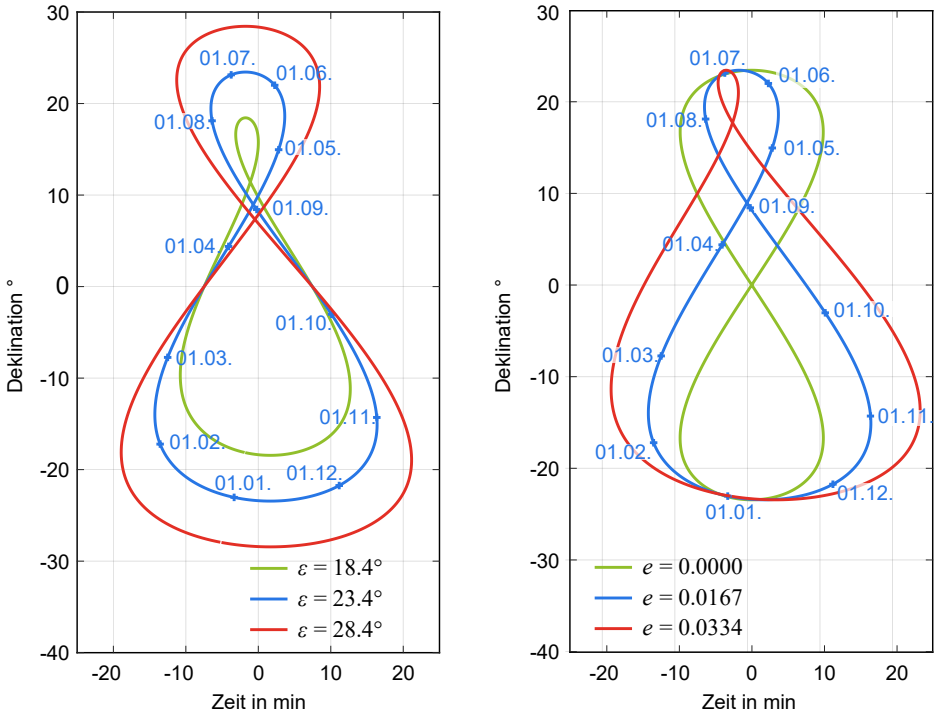
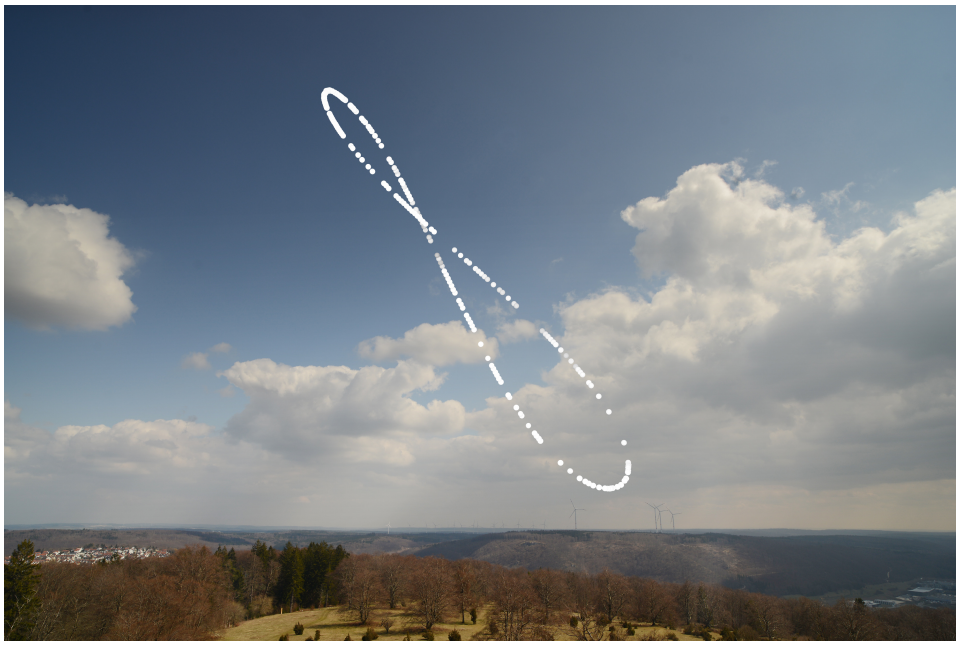


Abb. 3.18: Berechnete Analemma für verschiedene Parameter ε, e (MATLAB Skript 3.39)

nahmen mit einem Hintergrundbild.[45] In Abb. 3.19 zeigen wir ein Analemma, welches in den Jahren 2019/20 täglich umd 08:40 MOZ aufgenommen wurde und dessen Fit an die berechnete Kurve (MATLAB Skript 3.39).[46] Um einen Fit mit den berechneten Kurven zu bekommen, überführt man sowohl die Aufnahmedaten als auch die Vorwärtsberechnungen in das topozentrisch-horizontale KOS, wobei es dabei zu den charakteristischen Verzeichnungen kommt. Man erkennt sehr gut, dass die Annahme einer doppelt so großen Exzentrizität der Erdbahn zu massiven Abweichung des berechneten Analemmas von der beobachten Kurve führen würde. Für die Bilddatenumrechnung sei an dieser Stelle auf die detaillierte Darstellung in Ref. [19] und [6] verwiesen.
In Abb. 3.20 haben wir noch schließlich berechnete Analemmas für zwei Standorte der Erde für verschiedene Tageszeiten dargestellt. Man beachte die Effekte des Polarsommers bzw. Polarwinters auf das Analemma von Tromsø.

[45] Man bekommt so auch einen nachträglichen Wetterbericht über die Anzahl der Sonnentage.

[46] Das Komposit wurde von Bertram Hönlinger, Dietmar Mondon und Michael Kaschke mit einer Nikon D800 und einem ZEISS Classic Distagon T* 2.8/21 ZF.2 Objektiv aufgenommen.



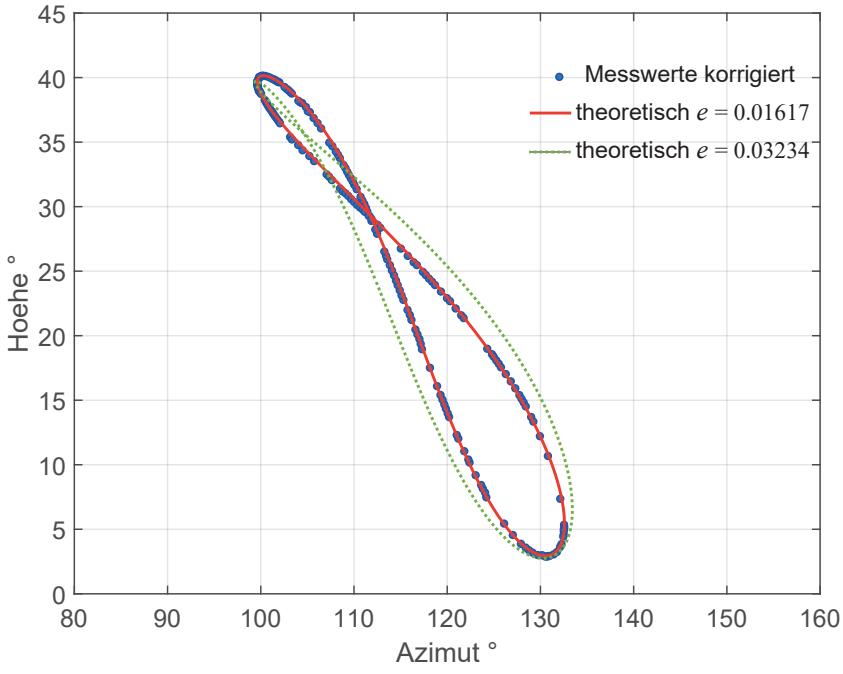


Abb. 3.19: Aufnahme eines Analemma in den Jahren 2019/2020 (Modellierung entsprechend MATLAB Skript 3.39).

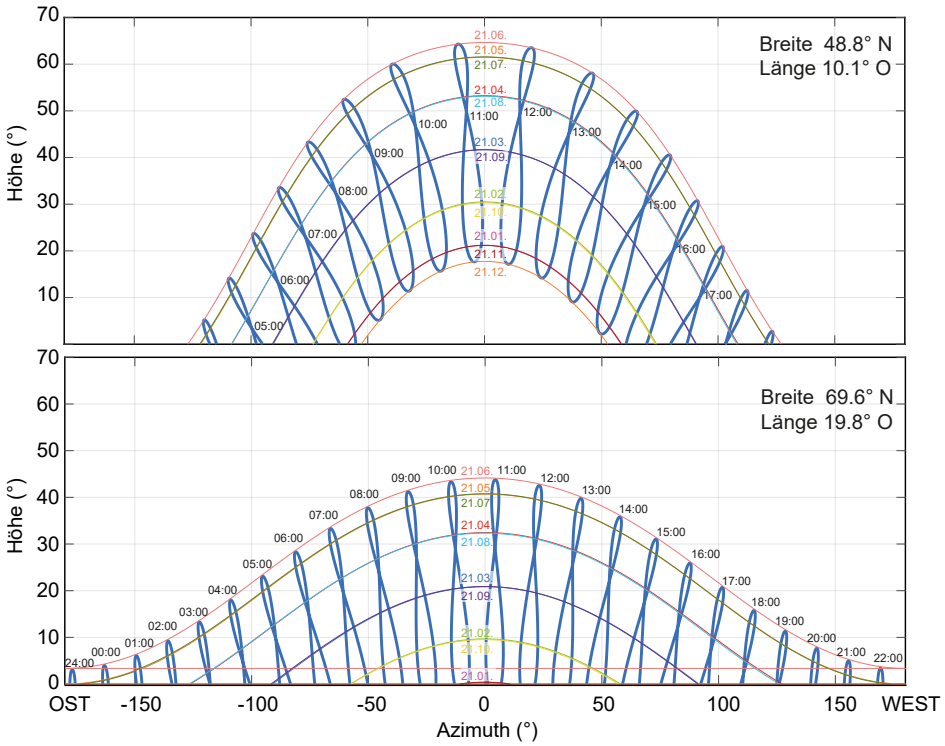


Abb. 3.20: Berechnete Analemma-Bilder für Oberkochen, Deutschland (a) und Tromsø, Norwegen (b) (MATLAB Skript 3.39).

3.5.2.2 Refraktionskorrekturen, Parallaxe

Zur Berechnung von Auf- und Untergangszeiten müssen wir das topozentrisch-horizontale KOS benutzen und den Stundenwinkel τ des Himmelskörpers bei $h = 0$ mit (3.4) berechnen. Dabei müssen wir aber Einflussfaktoren wie Refraktion, Parallaxe und scheinbaren Durchmesser D_{O} des Himmelskörpers berücksichtigen, die wir hier kurz vorstellen wollen.

Refraktion

In der Astronomie ist vor allem die Ablenkung der Lichtstrahlen durch die Erdatmosphäre und die damit verbundene „scheinbare“ Änderung der Koordinaten von Bedeutung. Physikalisch gesehen wird diese Brechung (Refraktion) der aus dem All kommenden Lichtstrahlen durch die optisch dichter werdenden Schichten der Atmoshpäre verursacht. Als Folge davon werden die Lichtstrahlen zur Erde hin gekrümmt (Übung 3.12). Da Beobachter immer von einer geradlinigen Ausbreitung ausgehen, weicht die Beobachtungsrichtung vom tatsächlichen Lichtweg ab. Alle Objekte werden daher unter einer größeren Höhe (der scheinbaren Höhe h') als der wahren, d. h. berechneten (sogenannten astronometrischen)